



## فیزیک

گزینه ۳

۱

$$V_{\text{مکعب مستطیل}} = (2 \times 1 \times 1) = 2 \text{ cm}^3 = 2 \times (10^4)^3 (\mu\text{m})^3 = 2 \times 10^{12} \mu\text{m}^3$$

$$V'_{\text{مکعب}} = (2 \mu\text{m})^3 = 8 \mu\text{m}^3$$

$$N = \frac{V}{V'} = \frac{2 \times 10^{12}}{8} = 0.25 \times 10^{12}$$

گزینه ۳

۲

باتوجه به رابطه چگالی آلیاژ داریم:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

$$\frac{V_1=0.55V}{V_2=0.45V} \rightarrow \rho_{\text{مخلوط}} = 2 \times 0.55 + 3/5 \times 0.45 = 2.675 \text{ g/cm}^3$$

گزینه ۳

۳

جرم یخ را با m نشان می‌دهیم و می‌دانیم جرم آب حاصل از ذوب یخ نیز m است. است.

$$20 = V_{\text{یخ}} - V_{\text{ذوب شده}} \Rightarrow 20 = \frac{m}{0.9} - \frac{m}{1} \xrightarrow{\times 0.9} 18 = m - 0.9m \Rightarrow m = 180 \text{ g}$$

گزینه ۴

۴

شیشه جزء جامدهای بی‌شکل (آمورف) است.

گزینه ۲

۵

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\frac{5 \text{ mg} \cdot \text{cm}}{\mu\text{s}^2} \times \left(\frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^3 \text{ mg}}\right) \left(\frac{10^{-2} \text{ m}}{1 \text{ cm}}\right) \left(\frac{1 \mu\text{s}^2}{10^{-12} \text{ s}^2}\right) = 5 \times 10^{-6} \times 10^{-2} \times 10^{12} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 5 \times 10^4 \text{ N}$$

حجم ظاهری جسم را با استفاده از رابطه‌های هندسی به دست می‌آوریم:

$$V_{\text{ظاهری}} = a^3 = (10)^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

حجم واقعی جسم با استفاده از رابطه چگالی برابر است با:

$$V_{\text{واقعی}} = \frac{m}{\rho} = \frac{3600}{4} = 900 \text{ cm}^3$$

بنابراین حجم حفره برابر  $1000 - 900 = 100 \text{ cm}^3$  است. جرم آبی که این حفره را پر می‌کند برابر است با:

$$m = \rho V_{\text{حفره}} = 1 \times 100 = 100 \text{ g}$$

دقت اندازه‌گیری ابزار دیجیتال (رقمی) برابر یک واحد از آخرین رقمی است که دستگاه می‌خواند. بنابراین:

$$\begin{aligned} \overset{\text{آخرین رقم}}{2/00} \uparrow \text{ mV} &\Rightarrow \text{دقت اندازه‌گیری} = 0/001 \text{ mV} \\ \xrightarrow{1 \text{ mV} = 10^3 \mu\text{V}} &\text{دقت اندازه‌گیری} = 1 \mu\text{V} \end{aligned}$$

به کمک روش تبدیل زنجیره‌ای می‌توان نوشت:

$$45 \text{ mi/h} = 45 \left(\frac{\text{mi}}{\text{h}}\right) \left(\frac{1600 \text{ m}}{1 \text{ mi}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 20 \text{ m/s}$$

نمک طعام جامد بلورین است اما شیشه جامد بی‌شکل بوده و گزاره "الف" نادرست است. پدیده پخش در گازها سریع‌تر از مایع بوده و گزاره "ب" درست است.

با افزایش دما نیروی هم‌چسبی و به تبع آن نیروی کشش سطحی کاهش می‌یابد. پس قطره‌های خروجی از قطره‌چکان در دمای بالا کوچک‌تر می‌شود و گزاره "پ" درست است.

نیروی بین مولکول‌های مشابه را هم‌چسبی و نیروی بین مولکول‌های ناهمسان را دگرچسبی می‌گویند. اگر مایع روی سطح ریخته شود و نیروی هم‌چسبی بیشتر از نیروی دگرچسبی باشد، مایع به صورت قطره قرار گرفته و سطح را تر نمی‌کند.

دلیل تراکم ناپذیری مایعات نیروهای بین مولکولی است که کوتاه برد هستند.

با استفاده از تبدیل زنجیره‌ای می‌توان نوشت:

$$182 \text{ قیراط} = 182 \text{ قیراط} \times \frac{200 \times 10^{-6} \text{ kg}}{1 \text{ قیراط}} = 3/64 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{دقت دستگاه اول: } \frac{1}{100} \text{ ms} \\ \text{دقت دستگاه دوم: } \frac{1}{1000} \text{ ms} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\text{دقت دستگاه دوم}}{\text{دقت دستگاه اول}} = \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} = 0.1$$

حجم مخزن برابر است با:

$$V = 15 \times 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{min}} \times (3 \times 60) \text{min} = 27 \text{m}^3$$

$$\frac{V = a^3}{\sqrt[3]{V} = a} \rightarrow a = 3 \text{m}$$

پس هر ضلع مخزن برابر با ۳m است. حال آهنگ افزایش ارتفاع مایع درون مخزن را می‌یابیم:

$$\text{آهنگ افزایش حجم مایع درون مخزن} = \frac{\text{آهنگ افزایش ارتفاع}}{\text{سطح مقطع مخزن}}$$

$$= \frac{15 \times 10^{-2}}{3 \times 3} \text{m/min} = \frac{5}{3} \times 10^{-2} \text{m/min}$$

حال با استفاده از روش تبدیل زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{5}{3} \times 10^{-2} \text{m/min} = \frac{5}{3} \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{min}}{60 \text{s}} \times \frac{1 \text{cm}}{10^{-2} \text{m}} = \frac{1}{36} \text{cm/s}$$

$$37500 \text{mm}^3/\text{min} \times \frac{(10^{-3})^3 \text{m}^3}{1 \text{mm}^3} \times \frac{10^3 \text{L}}{1 \text{m}^3} \times \frac{24 \times 60 \text{min}}{1 \text{شبهانه روز}} = 54 \text{L/روز}$$

ابتدا حجم کره کامل و حجم کره‌ای که از آن خارج کرده‌ایم را به دست می‌آوریم:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{cm}$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 3^3 = 108 \text{cm}^3$$

$$V'_{\text{خارج شده}} = \frac{4}{3} \pi r'^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 2^3 = 32 \text{cm}^3$$

جرم کره جدا شده،  $92/8 \text{g}$  است؛ بنابراین چگالی آن برابر است با:

$$\rho' = \frac{m'}{V'} = \frac{92/8}{32} = 2/9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

حجم کره ناقص باقی‌مانده برابر است با:

$$V'' = V - V' = 108 - 32 = 76 \text{cm}^3$$

لذا جرم کره ناقص باقی‌مانده برابر است با:

$$m'' = \rho'' \cdot V'' = 2/9 \times 76 = 220/9 \text{g}$$

ابتدا دبی را به یکای اصلی (SI) تبدیل می‌کنیم. مطابق تعریف، یکای اصلی دبی برابر  $(m^3/s)$  است.

$$45000 \frac{cm^3}{s} \times \left( \frac{10^{-6} m^3}{1 s} \right) = 45000 \times 10^{-6} (m^3/s)$$

توجه داشته باشید که در تبدیل‌های زنجیره‌ای، هر یک مترمکعب برابر  $1000 L$  (لیتر) است پس:

$$\begin{aligned} 45000 \times 10^{-6} (m^3/s) \times \left( \frac{10^3 L}{1 min} \right) &\Rightarrow 45000 \times 10^{-6} (m^3/s) \left( \frac{10^3 L \times 60 s}{1 min} \right) \\ &= 45000 \times 10^{-6} \times 10^3 \times 60 (L/min) \Rightarrow \text{debi} = (45 \times 6) \times 10^{+1} = 270 \times 10^{+1} \\ &= 2700 (L/min) \end{aligned}$$

کمیت‌های اصلی، مستقل بوده و خود تشکیل‌دهنده سایر کمیت‌ها (کمیت فرعی) هستند. چگالی برگرفته از کمیت اصلی جرم و حجم است، پس فرعی محسوب می‌شود.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\text{اصلی(جرم)}}{\text{فرعی(حجم)}}$$

سرعت، جابه‌جایی ( $\vec{d}$ )، نیرو ( $\vec{F}$ ) و انرژی ( $\vec{E}$ ) کمیت‌های برداری هستند.

ابتدا باید ارتباط بین فوت مربع و اینچ مربع و نیز اینچ مربع و سانتی‌متر مربع را به دست آوریم.

$$1 ft = 12 inch \Rightarrow 1 ft^2 = 144 inch^2$$

$$1 inch = 2.54 cm \Rightarrow 1 inch^2 = 6.45 cm^2$$

$$13/5 \mu\text{hec} \times \frac{10^{-6} \text{hec}}{1 \mu\text{hec}} \times \frac{10^6 m^2}{1 \text{hec}} \times \frac{1 cm^2}{10^{-6} m^2} \times \frac{1 inch^2}{6.45 cm^2} \times \frac{1 ft^2}{144 inch^2} = 1/5 ft^2$$

## ریاضی

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} A = \text{شمارنده‌های طبیعی عدد } 36 \\ B = \text{شمارنده‌های طبیعی عدد } 27 \end{array} \right. \\ \Rightarrow A \cap B = \{1, 3, 9\} \end{aligned}$$

$$A - B = A - (A \cap B) = \{2, 4, 6, 12, 18, 36\} \Rightarrow n(A - B) = 6$$

$$t_n = an + b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_5 = 8 \\ t_{10} = 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5a + b = 8 \\ 10a + b = 5 \end{array} \right. \Rightarrow 5a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{5} = -0.6$$

$$5a + b = 8 \xrightarrow{a=-0.6} -3 + b = 8 \Rightarrow b = 11$$

$$t_{16} = 16a + b = 16(-0.6) + 11 = 1/4$$

اگر A و B جدا از هم باشند (مجزا هستند) یعنی اشتراک آن‌ها تهی است.

$$n(A \cap B) = 0$$

$$2n(A) + n(B) = 17 \Rightarrow (n(A), n(B))$$

$$= \{(0, 17), (1, 15), (2, 13), (3, 11), (4, 9), (5, 7), (6, 5), (7, 3), (8, 1)\}$$

می‌دانیم  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  (چون  $n(A \cap B) = 0$ )، پس بیشترین مقدار این عبارت برابر ۱۷ و کمترین مقدار آن برابر ۹ است. در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

راه حل اول: باتوجه به فرمول مساحت مثلث ABC داریم:

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow AB \cdot \sin 45^\circ = BC \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow (2\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = BC \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow BC = 4$$

راه حل دوم: طبق قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{BC} = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow BC = 4$$

دنباله مربوط به شکل، دنباله مثلثی است که جمله عمومی آن  $\frac{n(n+1)}{2}$  می‌باشد و تعداد دایره‌های شکل یازدهم آن به صورت زیر است:

$$\frac{11 \times 12}{2} = 66$$

حال در دنباله حسابی داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -3 + 3(n-1) \Rightarrow a_n = 3n - 6$$

پس داریم:

$$3n - 6 = 66 \Rightarrow 3n = 72 \Rightarrow n = 24$$

$$a_n = 3n - 1 \Rightarrow 2, 5, \underline{8}, 11, 14, 17, \underline{20}, 23, 26, 29, \underline{32}, \dots$$

$$b_n = 4n \Rightarrow 4, \underline{8}, 12, 16, \underline{20}, 24, 28, \underline{32}, 36, \dots$$

پس دنباله حاصل به صورت  $\dots, 20, 25, 32, 40$  است.

$$c_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow c_n = 8 + 12(n-1) \Rightarrow c_n = 12n - 4$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_4 \Rightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = a_1 + 3d$$

$$\Rightarrow 2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$a_1 = \frac{r}{r^3}$$

$$a_5 = \frac{1}{r^3} \Rightarrow a_1 r^4 = \frac{1}{r^3} \Rightarrow \frac{r}{r^3} r^4 = \frac{1}{r^3} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{r^3} \Rightarrow r^5 = \frac{1}{r^3} \Rightarrow r = \pm \frac{1}{\sqrt[5]{r}}$$

اگر  $r = -\frac{1}{\sqrt[5]{r}}$  باشد، آنگاه  $d < 0$  می‌شود که در تضاد با شرایط مسئله است. (هرچند علامت  $r$  تأثیری در خواسته سؤال ندارد)

$$e = a_7 = a_1 r^6 = a_1 r^4 r^2 = a_5 r^2 = \frac{1}{r^3} \times \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^5}$$

اطلاعات مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\frac{a_8}{a_6} = \lambda \Rightarrow \frac{a_1 r^7}{a_1 r^5} = \lambda \Rightarrow r^2 = \lambda \Rightarrow r = \pm \sqrt{\lambda}$$

جمله پنجم و هفتم را با توجه به جمله سوم می‌یابیم:

$$a_5 = a_3 \times r^2 \Rightarrow a_5 = -18 \times 9$$

$$a_7 = a_3 \times r^4 \Rightarrow a_7 = -18 \times \lambda$$

حال داریم:

$$a_5 - a_7 = -18 \times 9 - (-18 \times \lambda) = 18 \times \lambda - 18 \times 9$$

$$= 18(\lambda - 9) = 18 \times 72 = 1296$$

از  $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + 2$  می‌توان نتیجه گرفت:

$$a_6 - a_5 = a_5 + 2$$

حال جمله پنجم دنباله را پیدا کرده و حاصل  $a_5 + 2$  را حساب می‌کنیم:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2; a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 \times 1 + 2 = 4, a_3 = 2 \times 4 + 2 = 10$$

$$a_4 = 2 \times 10 + 2 = 22, a_5 = 2 \times 22 + 2 = 46$$

$$\Rightarrow a_6 - a_5 = 46 + 2 = 48$$

$$(-5)^n = (a-5)(a+19) \Rightarrow 25 = a^2 + 14a - 95$$

$$\Rightarrow a^2 + 14a - 120 = 0 \Rightarrow (a+20)(a-6) = 0 \Rightarrow a = -20 \text{ یا } a = 6$$

غیرقابل قبول چون دنباله به دست آمده صعودی نیست  $a = 6: 1, -5, 25, \dots$

$$a = -20: -25, -5, -1, \frac{-1}{5}, \dots \Rightarrow a_1 = -25, q = \frac{1}{5}$$

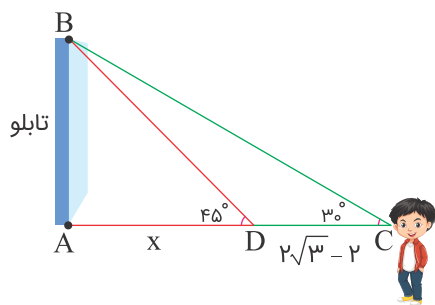
نکته: یک الگوی خطی به صورت  $a_n = an + b$  است.

پس ضریب  $n^2$  را باید برابر با صفر قرار دهیم:

$$(m+1) = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$\Rightarrow a_n = (-1+3)^n + \frac{(-1)}{2} = 2^n - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a_3 = 2^3 - \frac{1}{2} = 8 - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$



$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{x + 2\sqrt{3} - 2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

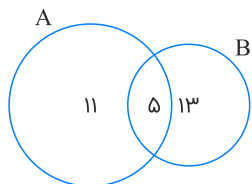
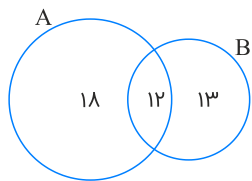
$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{x} = 1 \Rightarrow AB = x$$

در رابطه اول به جای  $x$ ،  $AB$  قرار می‌دهیم:

$$\frac{AB}{AB + 2\sqrt{3} - 2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}AB = AB + 2\sqrt{3} - 2 \Rightarrow \sqrt{3}AB - AB = 2(\sqrt{3} - 1)$$

$$AB(\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow AB = 2$$

اول شرایط این طوری بوده!



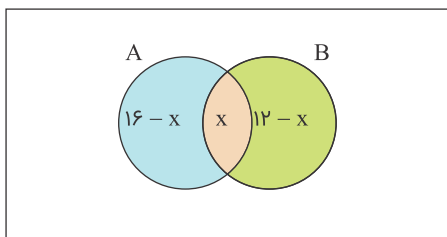
بعد این شکلی شده:

تعداد کل اعضا در حالت جدید برابر است با:  $11 + 5 + 13 = 29$

ولی سؤال تعداد عضوهای مجموعه جدید A را با مجموعه قبلی B می‌خواهد. B که ۲۵ عضو داشت. مجموعه جدید A هم ۱۱ عضو دارد که با B مشترک نیست. در کل  $36 = 25 + 11$  عضو خواهیم داشت.

فرض کنید دانش‌آموزان گروه ورزش A و گروه روزنامه‌دیواری B است، معلومات مسئله چنین‌اند:

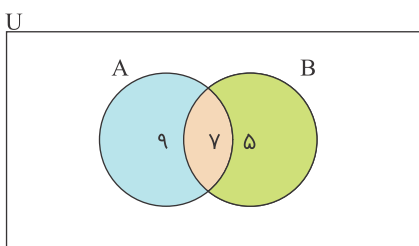
$$n(U) = 39, n(A) = 16, n(B) = 12, n(A - B) = 9$$



می‌دانیم که:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 16 - x = 9 \Rightarrow x = 7$$

بنابراین ۷ نفر در هر دو گروه قرار دارند:



در نتیجه:

$$\begin{aligned} n(U) - n(A \cup B) &= \text{دانش‌آموزانی که عضو هیچ گروهی نیستند} \\ &= 39 - (n(A) + n(B) - n(A \cap B)) = 39 - (16 + 12 - 7) = 18 \end{aligned}$$

راه‌حل اول:

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+4} 11 \xrightarrow{+5} 16 \xrightarrow{+6} 22 \xrightarrow{+7} 29 \xrightarrow{+8} 37 \xrightarrow{+9} 46$$

جملة دهم

راه‌حل دوم:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, a_2 = 1 + 1, a_3 = 1 + 1 + 2, a_4 = 1 + 1 + 2 + 3, \dots, a_{10} = 1 + 1 + \dots + 9 \\ \Rightarrow a_{10} &= 1 + \frac{9 \times 10}{2} = 46 \end{aligned}$$



جمله سوم واسطه هندسی جملات دوم و چهارم است.

$$y, \underbrace{x-1}_a, \underbrace{x}_b, \underbrace{x+2}_c, z$$

$$b^2 = ac \Rightarrow x^2 = (x-1)(x+2) \Rightarrow x^2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y, 1, 2, 4, z$$

باتوجه به جملات به دست آمده، نسبت مشترک دنباله هندسی  $r = 2$  است، پس:

$$y = \frac{1}{2}, z = 8 \Rightarrow xyz = 2 \times \frac{1}{2} \times 8 = 8$$

$$a \times aq \times aq^2 \times \dots \times aq^{30} = a^{31} \times q^{1+2+\dots+30} = a^{31} \times q^{\frac{30 \times 31}{2}}$$

$$= (aq^{15})^{31} = 2^{62} \Rightarrow aq^{15} = 2^2 = 4$$

حاصل ضرب جملات اول و آخر را پیدا می‌کنیم:

$$a \times aq^{30} = a^2 q^{30} = (aq^{15})^2 = 4^2 = 16$$

شکل‌ها را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم و الگوی هر قسمت را جداگانه به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{قسمت بالایی} = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \\ \text{قسمت وسطی} = (n+1)^2 \\ \text{قسمت پایینی} = \frac{(n-1)n}{2} \end{cases}$$

$$\text{مجموع سه قسمت} \Rightarrow a_n = (n-1)n + (n+1)^2 = 2n^2 + n + 1$$

پس:

$$a_{10} + a_{11} = 211 + 254 = 465$$

$$M = \{1, 2, \dots, 120\}$$

$$A = \{1, 3, 5, \dots, 119\}$$

$$B = \{3, 9, \dots, 117\} \Rightarrow \text{تعداد عضوهای } B : \frac{117-3}{6} + 1 = 19 + 1 = 20$$